Le 08/01/2024

F.P. TAZA
Pr : A. Mouhib
filière : M/MSP

Correction de l'examen Algèbre I
Session normale

Exercice 1 :

1) Montrons que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

- Pour tout ensemble E, on a $E \simeq E$, en effet

$$id_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x$$

est une application bijective.

Ainsi $\simeq$ est une relation réflexive.

- Soient E et F deux ensembles tels que $E \simeq F$, alors il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$, il s'ensuit que $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection, d'où $F \simeq E$. Ainsi $\simeq$ est une relation symétrique,

- Soient E, F et G trois ensembles tels que $E \simeq F$ et $F \simeq G$, alors il existe deux bijections $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Il s'ensuit que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une bijection.

Ainsi $E \simeq G$ et donc $\simeq$ est une relation transitive.

En conclusion, $\simeq$ est une relation d'équivalence.

2) • Montrons que $E \simeq E'$ et $F \simeq F' \Longrightarrow E \times F \simeq F \times F'$

Supposons $E \simeq E'$ et $F \simeq F'$, alors il existe deux bijections $f : E \longrightarrow E'$ et $g : F \longrightarrow F'$

Soit l'application $h : E \times F \longrightarrow F \times F'$

$$(x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

Montrons que h est bijective.

⊕ h est injective, en effet : soient (x, y) et (x', y') deux éléments de $E \times F$ tels que $h(x,y) = h(x',y')$.

Ainsi $(f(x), g(y)) = (f(x'), g(y'))$, ce qui implique $f(x) = f(x')$ et $g(y) = g(y')$. Comme f et g sont bijectives, donc injectives, alors $x = x'$ et $y = y'$.

Par conséquent, $(x, y) = (x', y')$ et donc h est injective

⊕ h est surjective, en effet : soit $(z, z') \in F \times F'$, alors comme f et g sont surjectives, il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $f(x) = z$ et $g(y) = z'$, ainsi $h(x, y) = (z, z')$, d'où h est surjective et donc h est bijective, d'où

$E \simeq E'$ et $F \simeq F' \Longrightarrow E \times F \simeq F \times F'$!

•) Montrons que $E \simeq E' \Longrightarrow \mathcal{P}(E) \simeq \mathcal{P}(E')$.

Supposons que $E \simeq E'$, alors il existe une application bijective $f : E \longrightarrow E'$. Considérons l'application

$$h : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E'), \quad A \longmapsto f(A)$$

montrons que h est bijective.

+) h est injective, en effet : soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $h(A) = h(B)$, alors $f(A) = f(B)$. Comme f est bijective, alors $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$ entraîne $A = B$, d'où h est injective.

+) h est surjective, en effet : soit $B \in \mathcal{P}(E')$, alors posons $A = f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$. Ainsi $h(A) = h(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$ (car f est bijective)

En conclusion, $E \simeq E' \Longrightarrow \mathcal{P}(E) \simeq \mathcal{P}(E')$.

Exercice 2 : soit n un entier naturel impair

1) Montrons que $n \equiv 1 [4]$ ou bien $n \equiv 3 [4]$. Il suffit d'effectuer la division euclidienne de n par 4, alors $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 4q + r$, où $0 \leq r < 4$.

Comme n est impair, alors r doit être différent de 0 et 2, d'où $r = 1$ ou bien $r = 3$. Ainsi,

$n \equiv 1 [4]$ ou bien $n \equiv 3 [4]$.

2) Voir cours.

3) Soit $S = \{p \text{ premier} / p \equiv 3[4]\}$. Montrons par absurde que S est infini. En effet, par absurde supposons que S est fini, posons $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, où les p_i sont les seuls nombres premiers congrus à $3[4]$.

posons $N = 4p_1p_2\cdots p_n - 1$. Il est clair que $N \equiv 3[4]$.

D'après le T.F.A, N s'écrit sous la forme :

$N = \prod_{i=1}^{r} q_i^{\alpha_i}$, où $r \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et q_i sont des premiers impairs. Si $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $q_i \equiv 1[4]$, alors $q_i^{\alpha_i} \equiv 1[4]$ et par conséquent, $N \equiv 1[4]$, ce qui contredit $N \equiv 3[4]$. Ainsi $\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, r\}$, ~~$q_{i_0} \equiv 3[4]$~~ tel que $q_{i_0} \not\equiv 1[4]$ et d'après 1), $q_{i_0} \equiv 3[4]$.

Il s'ensuit que $q_{i_0} \in S$, ainsi q_{i_0} est l'un des premiers p_i, $i = 1, \dots, n$, d'où $q_{i_0} \mid 4p_1p_2\cdots p_n$

par conséquent $q_{i_0} \mid N - 4p_1\cdots p_n = -1$, ce qui est absurde.

En conclusion S est infini.

<u>Exercice 3</u> : 1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow$ f est injective

Soient $x, y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$, alors $g(f(x)) = g(f(y))$, d'où $g \circ f(x) = g \circ f(y)$

or $g\circ f$ est injective, d'où $x=y$. Ainsi f est injective.

2) $g\circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.

Soit $y\in C$, alors comme $g\circ f : A \longrightarrow C$ est surjective,

il existe $x\in A$ tel que $g\circ f(x)=y$, d'où

$g(f(x))=y$. or $f(x)\in B$, il s'en suit que g est surjective.

Exercice 4 : Notons $\forall a\in A$, $\varphi_a : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longrightarrow ax \end{array}$

1) Montrons que $(End(A), +, \circ)$ est un anneau.

$\forall f, g\in End(A)$, les lois $+$ et $\circ$ sont définis comme suit :

$$f+g : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array}$$

$$f\circ g : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longmapsto f(g(x)) \end{array}$$

L'associativité de $+$ et la distributivité de $\circ$ par rapport à $+$ sont immédiates.

- L'élément neutre de la loi "$+$" est l'application nulle $0_A : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longrightarrow 0_A(x)=0 \end{array}$ (0 est l'élément neutre de $(A,+)$)
- L'élément symétrique de $f\in End(A)$ est $-f : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longrightarrow -x \end{array}$ avec $-x$ est le symétrique de x dans $(A,+)$.

donc $(End\,A), +)$ est un groupe

• L'élément neutre de $(End(A), \circ)$ est l'application identité

$$id_A : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ x \longmapsto x \end{array}$$

Ainsi $(End(A), +, \circ)$ est un anneau.

2) Montrons que $\varphi : \begin{array}{l} A \longrightarrow End(A) \\ a \longrightarrow \varphi_a \end{array}$ est un homomorphisme d'anneaux.

• Soient a et $b \in A$, mqm $\varphi(a+b) = \varphi_a + \varphi_b$, en effet on a $\varphi(a+b) = \varphi_{a+b}$. Pour montrer $\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b$, il suffit de montrer que $\forall x \in A$, $\varphi_{a+b}(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$.

on a $\varphi_{a+b}(x) = (a+b).x = a.x + b.x = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$.

D'où $\forall a, b \in A$, $\varphi(a+b) = \varphi_a + \varphi_b$.

• Soient a et $b \in A$, mqm $\varphi(a.b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$.

c'est à dire montrer que $\varphi_{a.b} = \varphi_a \circ \varphi_b$.

Ce qui revient à montrer que $\forall x \in A$, $\varphi_{a.b}(x) = \varphi_a \circ \varphi_b(x)$.

on a $\varphi_{a.b}(x) = (a.b).x$ et d'autre part, on a

$\varphi_a \circ \varphi_b(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(b.x) = a.(b.x)$, d'où

$\varphi_{a.b} = \varphi_a \circ \varphi_b$.

• Soit 1 l'élément neutre de $(A, \cdot)$, alors

$\varphi(1) = \varphi_1$. Or $\forall x \in A$, $\varphi_1(x) = 1.x = x$,

d'où $\varphi_1 = id_A$.

En conclusion φ est un homomorphisme d'anneaux

Montrons que φ est injectif.

Comme φ est un homomorphisme d'anneaux, alors montrer que φ est injectif revient à montrer que $\ker(\varphi) = \{0\}$, où 0 désigne l'élément neutre de $(A,+)$.

Soit $a \in \ker(\varphi)$, alors ~~φ_a~~ $\varphi_a = 0_A$, où

$0_A : A \longrightarrow A$ est l'application nulle.

$$\begin{aligned} 0_A : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto 0_A(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in A$, on a $\varphi_a(x) = 0_A(x)$, d'où $a.x = 0$. En particulier pour $x = 1$, l'élément neutre de $(A,.)$, on a $a.1 = 0$, ainsi $a = 0$, d'où $\ker(\varphi) = \{0\}$ et donc φ est injective.

Exercice 5 : Voir T.D